光技術者のための 基礎数学

河合 滋 著

OPTRONICS eBOOK

光技術者のための基礎数学

河合　滋　著

オプトロニクス社

はじめに

この本は、月刊オプトロニクスの No. 325（2009 年 1 月号）〜 No. 358（2011 年 10 月号）に連載したものをまとめたものです。当時、大学で学生に「光」を教えている中で、必要な数学を理解できていないために、数学の説明に多くの時間を費やし、困っていました。もちろん、数学を使わずに物理を理解することが重要なのですが、例えば、レンズによって光がどの方向に屈折するかということは、数学を使わないと正確に求めることができません。ちょうどその頃、月刊オプトロニクスの編集部の方から、基礎数学の連載の話をいただきました。是非やらせてもらいたいと引き受け、当初一年半くらいの期間を予定していましたが、執筆している間に内容が膨らみ、結局、三年近い連載となりました。

筆者は数学者ではないので、もちろん純粋な数学の本を書けるはずはありませんが、この本は、一般の数学の本とは大きく異なるものです。まず、光学の分野で使われない数学の説明は、ほとんどしていません。と言っても、光学では、難しい数学は使いませんが、高等学校の 3 年間で習う数学のほとんどを含む、かなり広い分野の数学を使うのではないかと思います。例えば、光学のように幾何学を駆使する物理学の分野は他にないように思いますし、レーザー光の伝搬を理解するには、確率分布を知っておく必要もあります。この本の他にない特徴は、それぞれの数学の分野が、光学でどのように使われるのかということを説明している点です。数学の本を読み進んでいると、それが物理学の分野でどのように使われるのかわからず、退屈になることがあります。一方、物理学の本を読み進んでいると、わからない数学が現れ、それを理解するには、どのような数学の本を読めばよいのかわからず、困ることがあります。この本は、そのような悩みを解決するために書いたもので、この本を一通り読めば、光学に現れるほとんどの数学に触れることができ、その数学を光学でどのように使うのかを理解することができます。高等学校の数学の内容から説明してあるので、高校生でも読み進むことができるはずです。古典光学の範囲は、この本でほぼ

カバーできていると思いますが、量子光学の分野では、入門書と思ってもらい、必要な部分は、さらに詳しく書かれている数学の専門書を読んでください。もう一つ大きな力を入れた点は、演習問題を充実させたことです。言うまでもなく、数学の本は寝転んで読めるものではなく、常に紙と鉛筆を傍に置いて計算する必要があります。それを助けるために、各章に多くの演習問題を付けました。

　光学は、日本が世界に誇れる技術の一つですが、昨今、大学で教えるところも少なくなり、この先の技術継承に対して大きな不安があります。この本を読んで、一人でも多くの方が、この分野に進んでくれることを期待しています。

2014 年 8 月

河合　滋

目　次

1. 三角関数

1.1 三角関数の定義

三角関数（Trigonometric Function）とは、図 1.1 に示すような、斜辺の長さが 1 である直角三角形の各辺の比を表したものである。二次元直交座標の原点を O、単位円（Unit Circle: 半径が 1 の円）上の点を A とし、A から x 座標に下ろした垂線の足を B とすると、OB は点 A の x 座標、BA は点 A の y 座標を表している。ここで、円周上を反時計方向に移動する点の点（1, 0）からの円弧の長さを α として、正弦関数（Sine)、余弦関数（Cosine)、正接関数（Tangent）を次のように定義し、これらを総称して三角関数と呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{AB}{OA} = y \\
\cos\alpha &= \frac{OB}{OA} = x \\
\tan\alpha &= \frac{AB}{OB} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

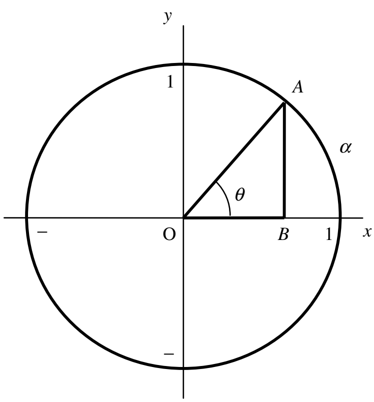


図 1.1 三角関数の定義

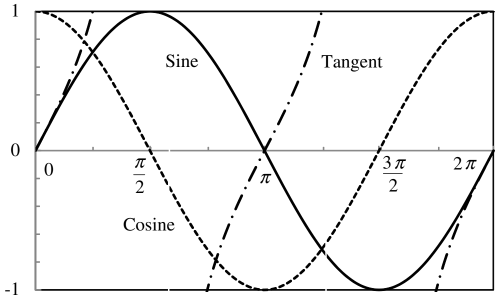


図 1.2 三角関数

α を表現するために、弧度（ラジアン : Radian）という距離を表す無次元の単位（rad と略す）を用いる。弧度は円弧の長さを表し、単位円の円周の長さが 2π であるから、零点を点（1, 0）とすると、π/2 rad が点（0, 1）、π rad が点（-1, 0）、3π/2 rad が点（0, -1）と一致して、2π rad で元の点（1, 0）に戻る。したがって、三角関数は 2π を周期とする周期関数であり、α を次式のように書き表すことができる。

$$\alpha = \alpha_0 + 2n\pi \tag{1.2}$$

ここで、n は整数、α_0 は $0 \leqq \alpha_0 < 2\pi$ を満たし、偏角と呼ばれている。図 1.2 は、α を 0 から 2π まで変化させた時の三角関数の値をグラフに示したものである。

　半径 r の円において、中心角 θ に対する円弧の長さを l とすると、次の関係が成り立つ。

$$l = r\theta \tag{1.3}$$

ここで、単位円を考えれば、$l = \theta$ となり、角度を弧の長さ、すなわちラジアンで表現することができる。図 1.1 において、OA が x 軸となす中心角を θ とすると、弧の長さ α と中心角 θ（°）の間には、次の関係がある。

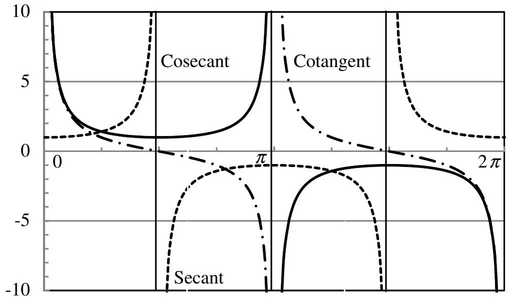


図 1.3 三角関数の逆数

$$\alpha = \frac{2\pi}{360}\theta = \frac{\pi}{180}\theta \tag{1.4}$$

このように，角度を弧の長さで表現する方法を弧度法と呼ぶ。

1.2 三角関数の逆数

三角関数の逆数を、それぞれ余割関数（Cosecant）、正割関数（Secant）、余接関数（Cotangent）と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
\csc\alpha &= \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{y} \\
\sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{x} \\
\cot\alpha &= \frac{x}{y} = \frac{\sec\alpha}{\csc\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

図 1.3 は、α を 0 から 2 π まで変化させた時の三角関数の逆数をグラフに示したものである。

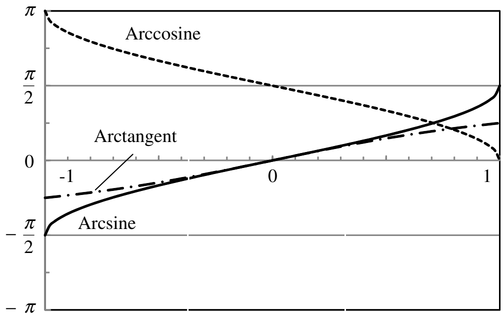


図 1.4 逆三角関数

1.3 逆三角関数

三角関数の逆関数（Inverse Function）を逆三角関数と呼ぶ。それぞれ、逆正弦関数（Arcsine）、逆余弦関数（Arccosine）、逆正接関数（Arctangent）と呼び、それぞれの関数の前に「arc」を付けて表記することがある。三角関数を二次元直交座標上の点（x, y）で書き表すと、次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
x = \sin\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha = \sin^{-1} x = \arcsin x \\
y = \cos\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha = \cos^{-1} y = \arccos y \\
\frac{y}{x} = \tan\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \arctan\frac{y}{x}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

図 1.4 は、α を -1 から 1 まで変化させた時の逆三角関数をグラフに示したものである。三角関数の逆数と逆三角関数は異なるものなので、注意が必要である。

1.4 三角関数の相互関係

図 1.1 および図 1.2 より、以下の関係は明らかである。

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x \end{aligned} \tag{1.7}$$

これより、正弦関数は奇関数（Odd Function）、余弦関数は偶関数（Even Function）であることがわかる。奇関数$f_o(x)$と偶関数$f_e(x)$には、次の性質がある。

$$\begin{aligned} f_o(-x) &= -f_o(x) \\ f_e(-x) &= f_e(x) \end{aligned} \tag{1.8}$$

また，図 1.1 および図 1.2 より，以下の関係も明白である。

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x \end{aligned} \tag{1.9}$$

単位円を考えた時、直角三角形の斜辺が 1 であることから、式（1.1）より次式が成り立つ。

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1.10}$$

1.5 正弦定理

三角形の外接円の半径を r とすると、各角 A，B，C と，それらの角に対する辺 a、b、c の間には、次の関係が成り立つ。

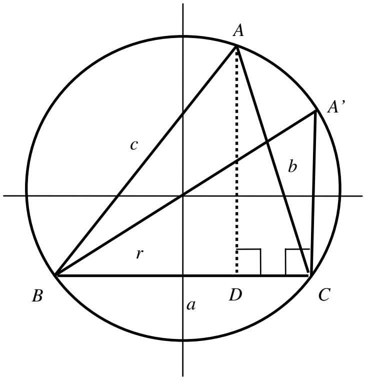


図 1.5 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r \tag{1.11}$$

これを正弦定理（Law of Sines）と呼ぶ。この定理は，次のように証明することができる。図 1.5 に示すように、三角形の頂点 A から辺 BC に垂線を下ろし、その足を D とすると、次式が成り立つ。

$$AD = c\sin B = b\sin C \tag{1.12}$$

同様にして、頂点 B から辺 AC に垂線を下ろせば、式（1.12）と同様にして以下の関係が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{1.13}$$

次に、三角形の外接円を考え、その円の中心を O、半径を r とする。頂点 B から O を通り円周と交わる点を A' とすると，円周角の定理（同じ円弧に対する円周角は等しい）より，以下の関係が得られる。

$$\angle BAC = \angle B\,A'C \tag{1.14}$$

円の中心を通る内接三角形の円周角は直角であるから、次式が成り立つ。

$$2r\sin\angle B\,A'C = 2r\sin A = a \tag{1.15}$$

これにより，正弦定理が証明された。

1.6 余弦定理

以下の関係を余弦定理（Law of Cosines）と呼ぶ。

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned} \tag{1.16}$$

これらの関係は、次のように証明することができる。図 1.6 に示すように、三角形の頂点 A から辺 BC に垂線を下ろし、その足を D とすると、三平方の定理より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 \\ c^2 &= (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2 \\ &= b^2\sin^2 C + a^2 - 2ab\cos C + b^2\sin^2 C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned} \tag{1.17}$$

他の式も同様にして成り立つ。

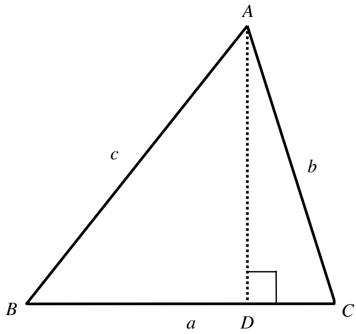


図 1.6 余弦定理

1.7　加法定理

以下の関係を三角関数の加法定理（Addition and Subtraction Theorems）と呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

これらの関係は、幾何学を用いて次のように証明することができる。ただし、x と y は、次の条件を満たすものとする。

$$
\begin{aligned}
&0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2} \\
&0 < x + y < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < x - y < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

図 1.7 に示すように、二つの直角三角形 OAB と OBC を配置し、AB＝1 と

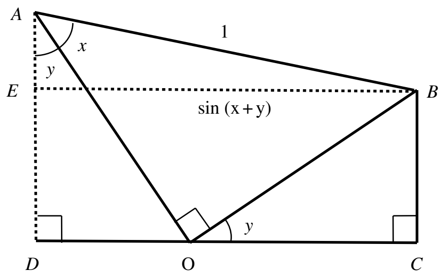


図 1.7 加法定理（加算）

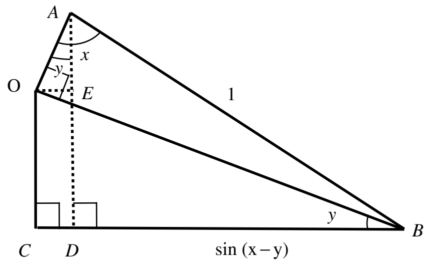


図 1.8 加法定理（減算）

する。A から OC に下ろした垂線の足を D、B から AD に下ろした垂線の足を E、∠ OAB を x、∠ BOC を y とすると、∠ BOC = ∠ OAD であるから、sin（x+y)=BE である。また、OC=sin$x$cos$y$、OD=cos x sin$y$、BE=CD であるから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= BE = CD = OC + OD \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\end{aligned} \tag{1.20}$$

同様にして、AE=cos(x+y)、AD=cos$x$cos$y$、DE=sin$x$sin$y$ であるから、次式が成り立つ。

$$\cos(x+y) = AE = AD - DE = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{1.21}$$

また、図 1.8 に示すように、二つの直角三角形 OAB と OBC を配置し、AB＝1 とする。A から BC に下ろした垂線の足を D、O から AD に下ろした垂線の足を E、∠ OAB を x、∠ OBC を y とすると $\sin(x-y)=BD$ である。また、$BC=\sin x\cos y$、$CD=\cos x\sin y$ であるから、次式が成り立つ。

$$\sin(x-y)=BD=BC+CD=\sin x\cos y-\cos x\sin y \tag{1.22}$$

同様にして、$AD=\cos(x-y)$、$AE=\cos x\cos y$、$ED=\sin x\sin y$ であるから、次式が成り立つ。

$$\cos(x-y)=AD=AE+ED=\cos x\cos y+\sin x\sin y \tag{1.23}$$

これらの関係より､正弦関数と余弦関数の加法定理が証明された。さらに、式（1.1）より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\tan(x\pm y)&=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos(x\pm y)}=\frac{\sin x\cos y\pm\cos x\sin y}{\cos x\cos y\mp\sin x\sin y}\\&=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}\end{aligned} \tag{1.24}$$

1.8 主な公式

三角関数の計算は、複雑になる場合が多いので、種々の公式を覚えておくと便利である。

(1) 倍角の公式

式（1.18）において $x=y$ とおくと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2\sin x\cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \tan 2x &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \end{aligned} \tag{1.25}$$

これらを倍角の公式（Double Angle Formula）と呼ぶ。

(2) 積和の公式

式（1.18）より、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sin x\cos y &= \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2} \\ \cos x\cos y &= \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2} \\ \sin x\sin y &= \frac{\cos(x+y)-\cos(x-y)}{2} \end{aligned} \tag{1.26}$$

これらを積和の公式（Product to Sum Identities）と呼ぶ。

(3) 和積の公式

式（1.26）において、x を新しく $(x \pm y)/2$、y を新しく $(x \mp y)/2$ とおくことにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{aligned} \tag{1.27}$$

これらを和積の公式（Sum to Product Identities）と呼ぶ。

(4) 次数下げの公式

式（1.26）において、$x=y$ とおくと次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\
\cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2} \\
\sin x \cos x &= \frac{\sin 2x}{2}
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

これを次数下げの公式（Power Reduction Formula）と呼ぶ。

(5) 合成公式

以下の式を合成公式と呼ぶ。

$$
\begin{gathered}
a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\beta) \\
\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{gathered}
\tag{1.29}
$$

これらの式は､次のようにして証明することができる｡図1.9に示すように、直交座標上の点を $\mathrm{P}(a,\, b)$ とし、OP が x 軸となす角を α とすると、次式が成り立つ。

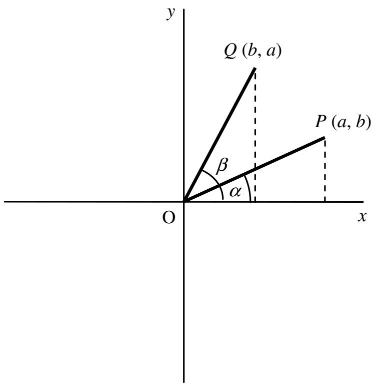


図 1.9 合成公式

$$
\begin{aligned}
&a=\sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha,\quad b=\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha \\
&a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\;=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\alpha\right)
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

同様にして、点 Q（b, a）を考えると、β の式を求めることができる。

1.9 光学分野における応用

（1）幾何光学における応用

幾何光学では、光線の伝搬を幾何学的に考えるので、それらの計算の中で、三角関数はよく現れる。ガウス光学では、光線を近軸近似（光線が光軸から離れない、すなわち光線と光軸のなす角度が小さいという近似）するので、以下の近似式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\sin\theta\approx\theta \\
&\tan\theta\approx\theta \\
&\cos\theta\approx 1
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

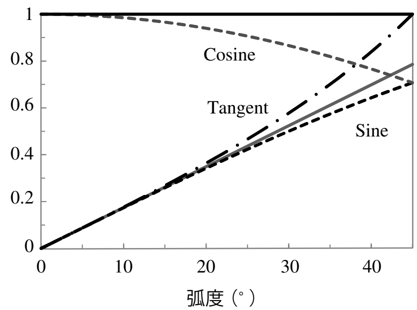


図 1.10 三角関数の近似

図 1.10 は、これらの近似式がどの範囲で成り立つかを調べるために、三角関数と弧度を表したものである。図より、この近似式は、およそ正弦関数は 30°以下、余弦関数は 10°以下、正接関数は 25°以下の範囲で成立していることがわかる。

(2) 等速回転運動と単振動

二次元直交座標（x, y）の原点を中心とする半径 A の円周上を等速運動する物体の位置は、それぞれ、時間 t の余弦関数と正弦関数で表現できる。

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= A\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{1.32}$$

ここで、ω を角振動数（角周波数 : Angular Frequency）と呼び、物体が一回転する時間（周期 : Period）を T とすると、次の関係がある。

$$\begin{aligned} \omega T &= 2\pi \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \tag{1.33}$$

この物体の位置ベクトル（第 2 章を参照のこと）は

$$\mathbf{r} = \left(A\cos(\omega t),\, A\sin(\omega t)\right) \tag{1.34}$$

であるから、速度ベクトルおよび加速度ベクトルは、後の項で説明するように、これを微分して

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(-A\omega\sin(\omega t),\, A\cos(\omega t)\right) \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(-A\omega^2\cos(\omega t),\, -A\omega^2\sin(\omega t)\right) \end{aligned} \tag{1.35}$$

となる。これらの関係から次式が得られる。

$$\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r} \tag{1.36}$$

加速度ベクトルと位置ベクトルの方向が逆であることから、等速円運動の加速度の方向は常に原点を向いていることがわかる。

このような等速円運動の x 軸または y 軸への射影を単振動と呼び、振動している物体の位置の変化は、それぞれ式（1.32）で表わされる。

（3）波

ある物理量が周期的に変化して空間を伝搬する現象を波と呼ぶ。波は、伝搬する媒質の密度の変化によって伝わる縦波と、物理量の変位が空間を伝搬する横波に分けることができる。周期的に変化する物理量は、周期関数によって記述することができる。任意の周期関数は、さまざまな振幅と周期をもった正弦関数と余弦関数の重ね合わせで表わすことができることが知られている。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\right\} \tag{1.37}$$

この式は、後の項で詳しく説明するが、フーリエ級数（Fourier Series）と呼ばれている。この式から、もっとも基本的な波は、正弦関数または余弦関数で表わされることがわかる。

(4) 光波

縦波が伝搬するには、振動する物質が必要である。横波においても、多くの場合、振動する物質が必要である。光波は電磁波の一種であり、後述のマクスウェルの方程式（Maxwell's Equation）を解くことにより横波であることがわかる。しかし、電磁波が伝搬する際に物質が振動しているわけではない。電磁波において変位が生じている物理量は電界と磁界である。アンテナから電波が放出される過程を考えてみよう。アンテナ内部の電子（電荷）の振動により電界が生じ、電界の変化によって磁界が生じ、それらが空間に放射される。電界と磁界の振動面は、互いに直交している。これが電磁波である。物質が振動しているわけではないので、電磁波は真空中でも伝搬する。

光は電波のようにアンテナから放射されることはないが、同じ電磁波なので、考え方は同じである。もっとも基本的な波が正弦波（Sinusoidal Wave）であることから、光波の電界の振動は、次のように表わされる。光の出射点から z だけ離れた位置における電界の振幅 $E(z, t)$ は、時間 t と共に変化し、次式で記述できる。

$$E(z,t) = A\cos\{\phi(z,t)\} = A\cos\left\{2\pi\left(\frac{\mathrm{z}}{\lambda} - \frac{t}{\mathrm{T}}\right)\right\} \\ = A\cos(\mathrm{kz} - \omega t) \tag{1.38}$$

ここで、A、ϕ、λ、k を、それぞれ振幅、位相、波長、波数と呼ぶ。ここで、正弦波であるのに、あえて余弦関数を用いて表している。後の項で詳しく説明するが、三角関数の計算をする時に、次のオイラの公式を用いて三角関数を複素関数に置き換えることがある。

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \tag{1.39}$$

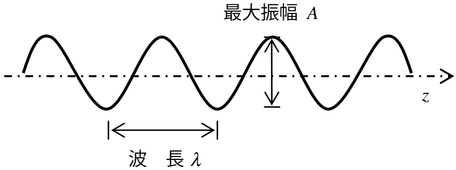


図 1.11 光波の電界の変化

この際、実部が余弦関数、物理的に意味がない虚部が正弦関数であることから、式（1.38）を余弦関数によって表している。三角関数だけを扱う時は、正弦関数を用いても何ら問題はない。

式（1.38）において、波長とは、図 1.11 に示すように、光波の一周期の長さを表し、振動数 ν とは、以下の関係にある。

$$\frac{n\lambda}{T} = n\nu\lambda = nv = c \tag{1.40}$$

ここで、n は媒質の屈折率、v は媒質中の光速度、c は真空中の光速度（2.99792458 × 10^8 m ／秒）である。例えば、真空中を伝搬する He-Ne レーザ光（波長 : 632.8 nm）の振動数は 473.8 THz である。

（5）光強度

光波の振動数は、電波の振動数に比べて非常に高い。電波では、アンテナで受信することによってその電界振幅の変化を直接観測することができるが、光波の場合には、電界振幅の変化を直接観測することはできない。我々が得られる光波の物理量は、十分長い時間かけて観測した平均値となる。しかし、電界振幅の平均値は零となるので、結局、光波の電界振幅を観測する術はない。

波が伝搬する際、エネルギも一緒に伝達される。この量は、後述のポインティングベクトルで表わされることが知られており、次のように記述できる。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{1.41}$$

ここで、E と H は、それぞれ電界と磁界の振幅を表わす。この式の詳細な意味は後の項で述べるが、この式は、マクスウェルの方程式を用いて次のように電界振幅だけで表わされる。

$$\left|\mathbf{S}\right| = \left|\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right| = \alpha \left|\mathbf{E}\right|^2 \tag{1.42}$$

ここで、α は物質特有の定数、記号は絶対値の自乗を表す。ベクトルや複素数の絶対値については後の項で説明するが、式（1.38）ではベクトル量や複素数を考えていないので、単純に自乗すればよい。このようにして光波が伝達するエネルギを求めることができる。しかし、エネルギの時間変化も直接観測することはできない。ただし,エネルギは電界振幅と異なり、十分長い時間かけて観測した平均値が零とはならないので、この量を観測することができる。観測可能な十分長い時間 τ の間に、光波の進行方向に対して垂直な単位面積を通過する単位時間あたりのエネルギ密度の平均値は、後の項で説明するように、次式で表わされる。

$$I_0 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \alpha E^2 dt \tag{1.43}$$

この式に式（1.38）を代入すると、次式が得られる。

$$I_0 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \alpha E^2 dt = \frac{\alpha A^2}{\tau}\int_0^\tau \cos^2(kz - \omega t) dt = \frac{\alpha A^2}{2} \tag{1.44}$$

ここで、右辺の係数を省略した物理量を光強度と呼ぶ。

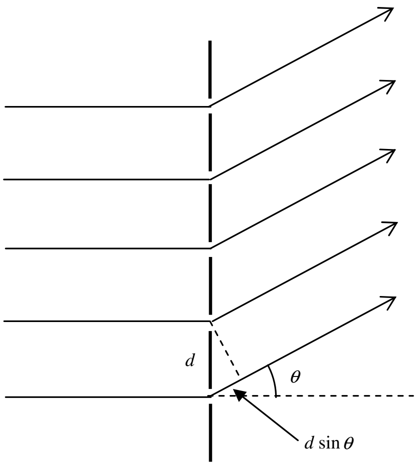


図 1.12 回折格子による回折

$$I = \left|E\right|^2 = A^2 \tag{1.45}$$

光強度は、電界振幅の変化に依存せず、最大振幅の自乗で表わされる。我々は、この光強度をフォトダイオードなどで観測することによって、電界振幅の大きさを知ることができる。

(6) 回折格子

図 1.12 に示すように、スリットを周期的に配列したものを回折格子（Grating）と呼ぶ。波面が回折格子に平行な平面波が回折格子に入射すると、各スリットを透過した光は、回折によって四方に拡がる。回折した光を十分遠方で観測すると、それらの干渉パタンが現れる。この時、各スリットからの回折光の位相が揃う方向に強い光が現れる。その方向 θ は、各スリットからの回折光の光路長差が波長の整数倍になる条件から求めることができる。回折光を十分遠方で観測すれば、格子のピッチを d、入射光の波長を λ として、以下の条件を満足する方向に強い光が現れる。

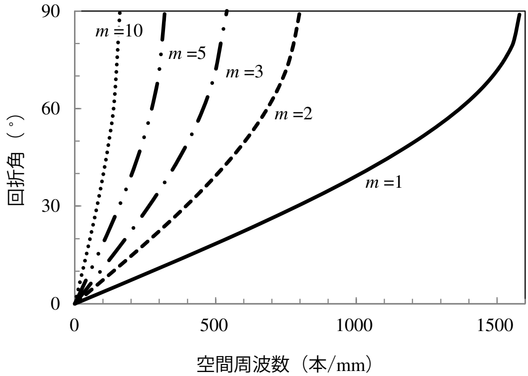


図 1.13 格子の空間周波数と回折角の関係

$$d\sin\theta = m\lambda$$
$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) \tag{1.46}$$

ここで、m は整数である。$m = 0$ の成分は、平面波がそのまま透過したもので 0 次回折光と呼ばれる。$m \neq 0$ の成分は回折によって生じる光であり、m 次回折光と呼ばれる。ただし、m が大きくなると θ が 90° を越えるため、回折光は生じない。この状態で、光は回折格子内部に浸み込んでおり、エバネッセント波と呼ばれている。図 1.13 は、He-Ne レーザ光の回折角と格子ピッチの関係を示したものである。

図 1.14 に示すように、平面波が回折格子に対して角度φで入射する場合、その光路長差は、入射側と出射側に対して独立に考えればよい。したがって、以下の条件を満足する方向に強い光が現れる。

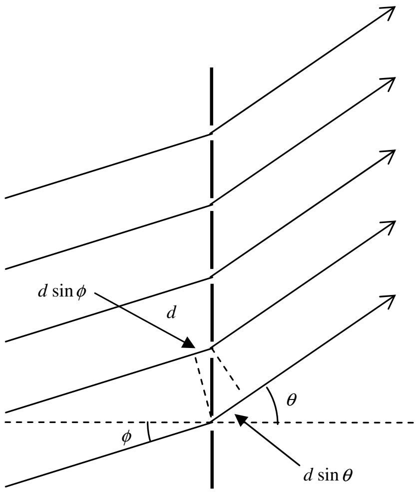


図 1.14 斜入射光による回折

$$
\begin{aligned}
& d\sin\theta - d\sin\phi = m\lambda \\
& \sin\theta - \sin\phi = \frac{m\lambda}{d} \\
& \therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d} + \sin\phi\right)
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

図 1.15 は、He-Ne レーザ光が斜入射した場合の +1 次回折光の回折角と格子ピッチの関係を示したものである。

演習問題

① 以下の式を証明せよ。

1) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

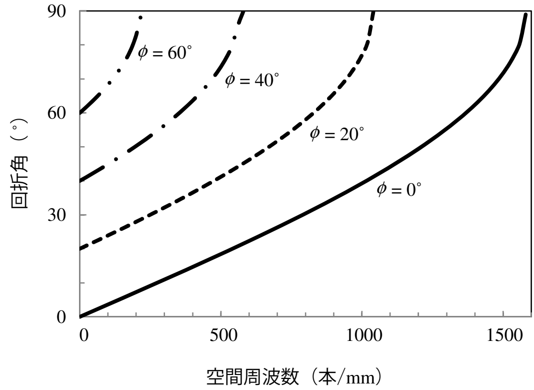


図 1.15 斜入射光の回折

2) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

3) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

4) $\sin x \cos y = \dfrac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$

5) $\cos x \cos y = \dfrac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$

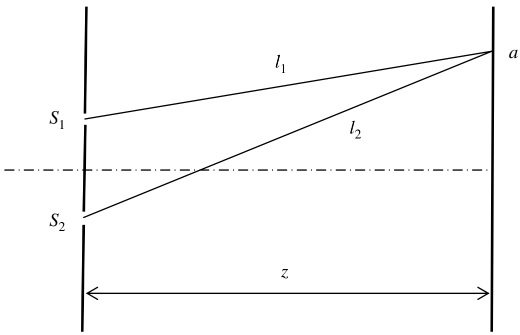
6) $\sin x \sin y = \dfrac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}$

7) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

8) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

9) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

10) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$



11) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

12) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

13) $\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$

② 以下の式を証明せよ。

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

③ 図のようなスリット S_1、S_2 に、角振動数 ω で振動している位相の揃った光を通過させ、それらから z だけ離れたところにあるスクリーン上の点 a において、透過光を観測する。点 a からスリット S_1、S_2 までの距離をそれぞれ l_1、l_2 として、以下の問いに答えよ。

（1）点 a における光の振幅を求めよ。

（2）点 a における光の強度を求めよ。

答え